

Mezihvězdné lety a logaritmické rovnice

(k čemu se hodí exponenciální a logaritmické funkce ...)

Vladimír Wagner

Ústav jaderné fyziky AVČR, 250 68 Řež

FJFI ČVUT Praha

E_mail: WAGNER@UJF.CAS.CZ

1) Úvod

2) Jak na mezihvězdné lety?

2.1 Potřebujeme energii

2.2 Raketový motor – potřebujeme hybnost

3) Ciolkovského rovnice - logaritmická a exponenciální funkce

3.1 Exponenciální a logaritmické funkce

3.2 Ciolkovského rovnice

3.3 Jak ji získáme?

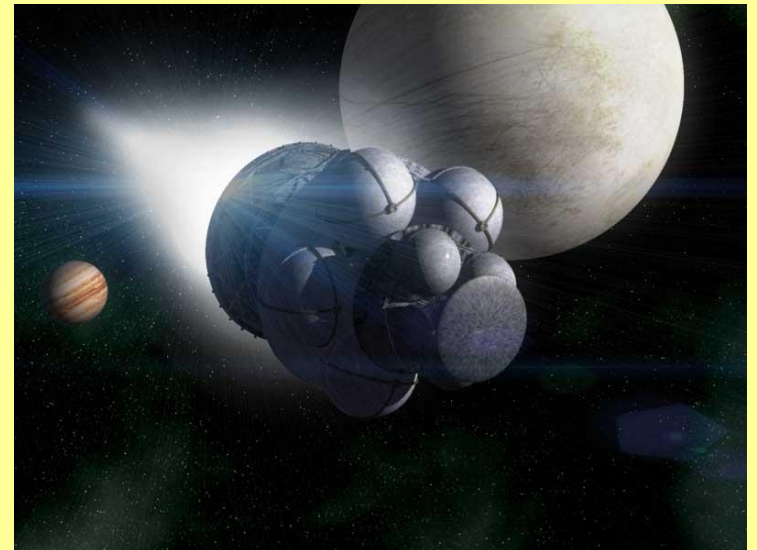
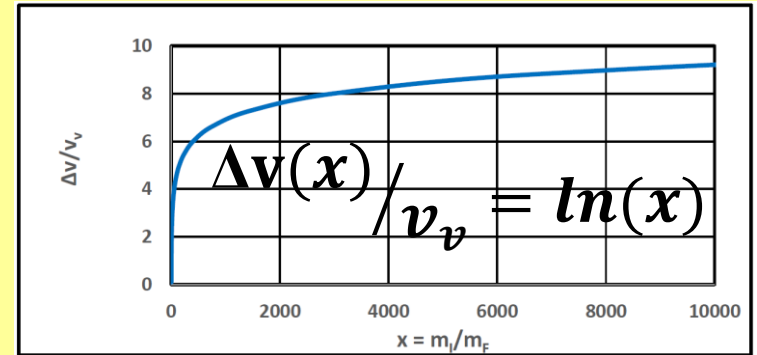
3.4 Efektivita využití energie

3.5 Relativistický případ

3.6 Co dostaneme v případě štěpení?

4) Příklad

5) Závěr



Mezihvězdný let a jeho problémy

Velká vzdálenost – nejbližší hvězdy ~ 4 sv.l., do 15 sv.l. pouze desítky hvězd

Časové omezení (doba lidského života) – let ne delší než 100 let

Rychlost – ne menší než několik procent rychlosti světla

Energetická náročnost: nejméně desítky milionů TJ, výkony v řádu desítek GW

Řešení pohonu fúzí či antihmotou (~~jinou~~ reálnou cestu zatím nevidíme) → velká loď, velké hmotnosti (nejméně 100 tun na loď)

Další problém: kosmické záření a interakce relativistické lodi s mezihvězdným prostředím



Možné zdroje energie - ty jaderné

Radioizotopové zdroje – využívají rozpad radioaktivních jader, prozatím nejčastěji využívané (několik desítek sond, hlavně k vnějším planetám)

I rozpadový zákon je exponenciální – podrobný rozbor v přednášce „Matematika pro jadernou fyziku“:

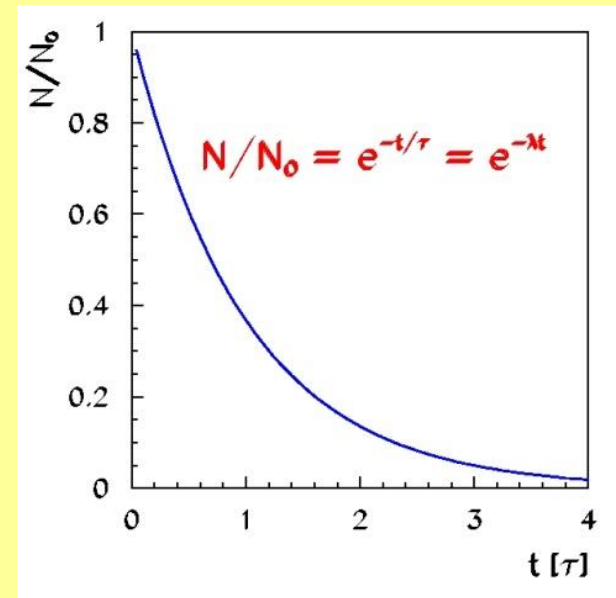
<https://www.youtube.com/watch?v=N24lfqlJPe8>

Jaderné reaktory – využívají štěpení velmi těžkých jader indukované zachytem neutronu umožňují velký výkon – největší využití u ruských radarových družic RORSAT

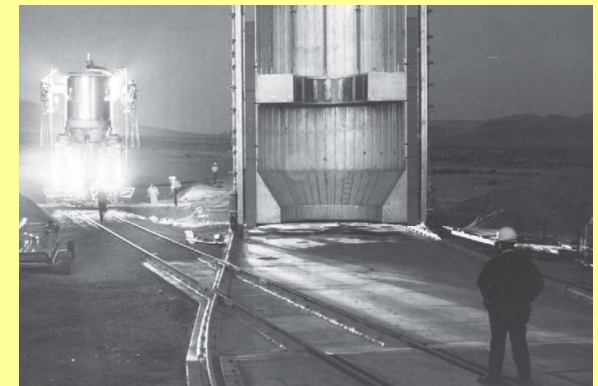
Reálně lze mezihvězdné lety s lidmi realizovat pouze s následujícími dvěma:

Termojaderné zdroje – využívají slučování lehkých prvků, stabilní průběh termojaderné reakce v laboratoři zatím nezvládnut – pro rakety inerciální udržení

Anihilační – využívají anihilace hmoty s antihmotou, obrovskou výzvou je získávání a skladování antihmoty



Rozpadový zákon pro radionuklidy – také exponenciála



Testy jaderných motorů NERVA

Jak na raketový pohon?

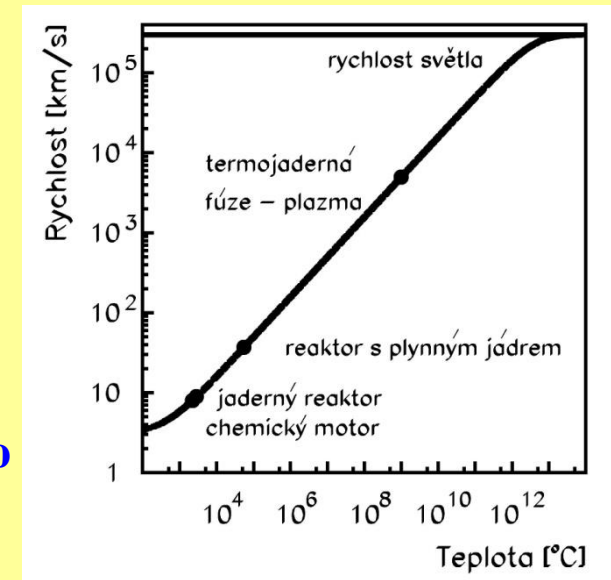
- 1) **Tepelný motor** - produkce horkého plynu (plazmy), který vyletuje z trysek. Ohřívání plynu (nejlépe vodíku) pomocí tepla z jaderného či termojaderného reaktoru. Zatím se většinou uvažoval rychlý reaktor – americký projekt NERVA
- 2) **Pulzní motor** – minivýbuchy, buď přímo malé jaderné či termojaderné bomby, nebo termojaderné palivo zapalováno lasery
- 3) **Iontové motory** – jaderné zdroje produkují elektřinu pro urychlování iontů. Elektrické pole urychluje nabitě ionty na vysoké výtokovou rychlostí a tak urychluje kosmickou loď (systém VASIMR) po urychlení se ionty neutralizují elektrony

Ve většině případů nízký tah a tedy malé zrychlení

Výhody: 1) Dlouhá doba práce

2) Větší účinnost využití paliva

3) Možnost libovolného počtu zastavení a spuštění



Vztah mezi teplotou a výtokovou rychlostí

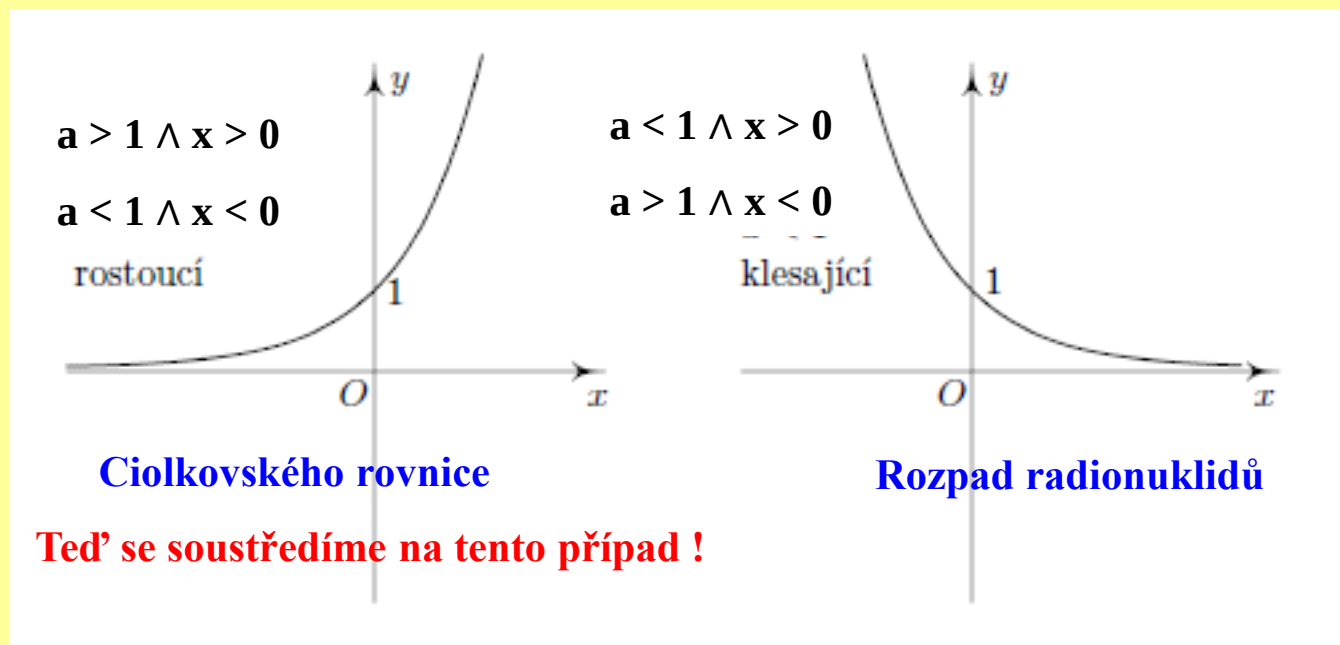


Test iontového motoru sondy SMART 1

Exponenciální a logaritmické funkce

Exponenciální funkce:

$$y = a^x, a > 0, a \neq 1, x = \mathbb{R}$$



Zaměříme se na případ: $y = e^x$ **Eulerovo číslo e je základ přirozených logaritmů**

Jednou z možností obdržet Eulerovo číslo je: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281\dots$

Důležité relace: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ $a^x = b^x \Leftrightarrow a = b$

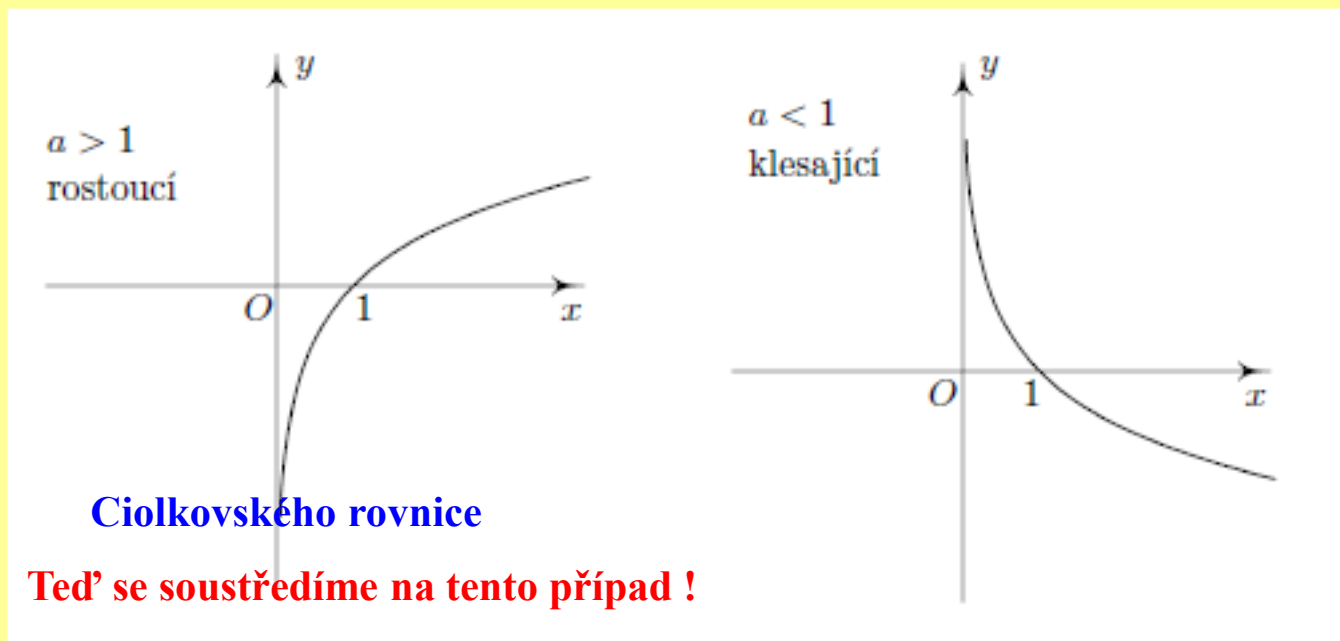
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Logaritmická funkce: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$, kde $a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}^+$



$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

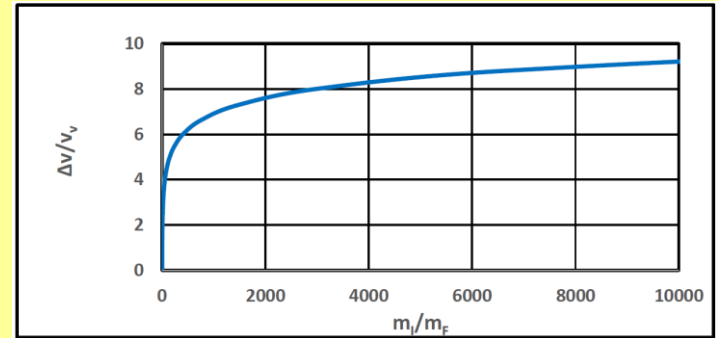
Vztah mezi dekadickým a přirozeným logaritmem

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \ln x \cdot \log e$$

Ciolkovského rovnice

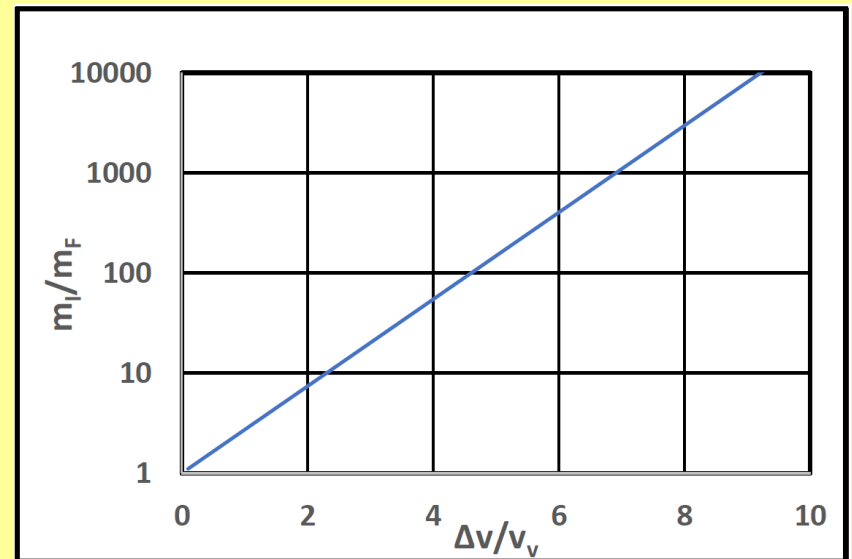
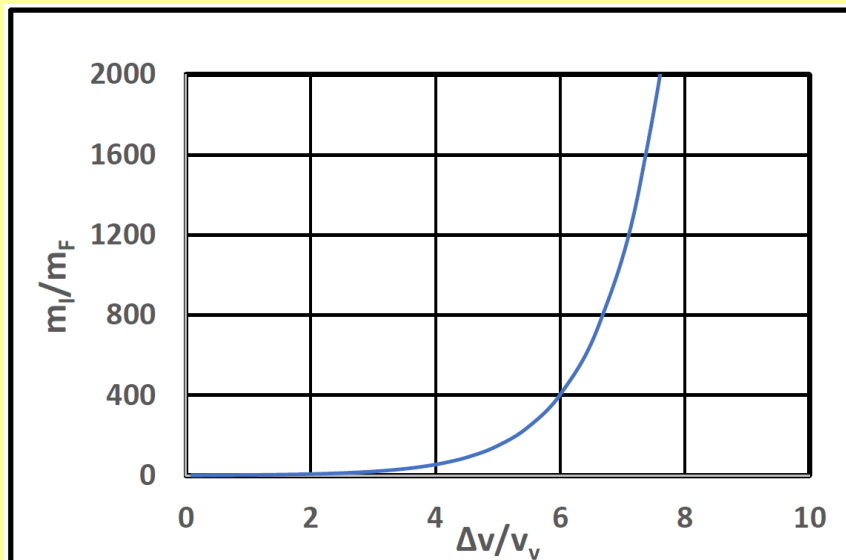
Ciolkovského rovnice je logaritmická
(určuje poměr rychlosti získané a výtokové):

$$\frac{\Delta v}{v_v} = \ln \frac{m_I}{m_F} \quad \text{případně} \quad \frac{\Delta v}{c} = \frac{v_v}{c} \cdot \ln \frac{m_I}{m_F}$$



$$m_I = m_F \cdot e^{\frac{\Delta v}{v_v}}$$
$$m_I - m_F = m_F \cdot e^{\frac{\Delta v}{v_v}} - m_F = m_F \cdot \left(e^{\frac{\Delta v}{v_v}} - 1 \right)$$

Růst potřebné hmotnosti „paliva“, poměru
počáteční a konečné hmotnosti je exponenciální



Odvození Ciolkovského rovnice

Platí zákon zachování hybnosti (akce a reakce): $dp_L = d(m \cdot v) = u \cdot dm = dp_v,$

Rychlost vyvrženého materiálu u je v laboratorní soustavě (nerelativistický případ – Galileiho transformace):

$$u = v - v_v$$

Dosadíme za u a provedeme derivaci:

$$m \cdot d(v) + v \cdot d(m) = (v - v_v) \cdot dm$$

Dostaneme známý vztah pro klasickou mechaniku:

$$m \cdot d(v) = -v_v \cdot dm$$

Vyjádření rychlosti v jednotkách c :

$$m \cdot d\left(\frac{v}{c}\right) = -\frac{v_v}{c} \cdot dm,$$

Řešíme diferenciální rovnici pomocí separace proměnných:

$$\frac{dm}{m} = -\frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{\frac{v_v}{c}} \Rightarrow \int_{m_I}^{m_F} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{\frac{v_v}{c}} \cdot \int_0^{\frac{\Delta v}{c}} d\left(\frac{v}{c}\right).$$

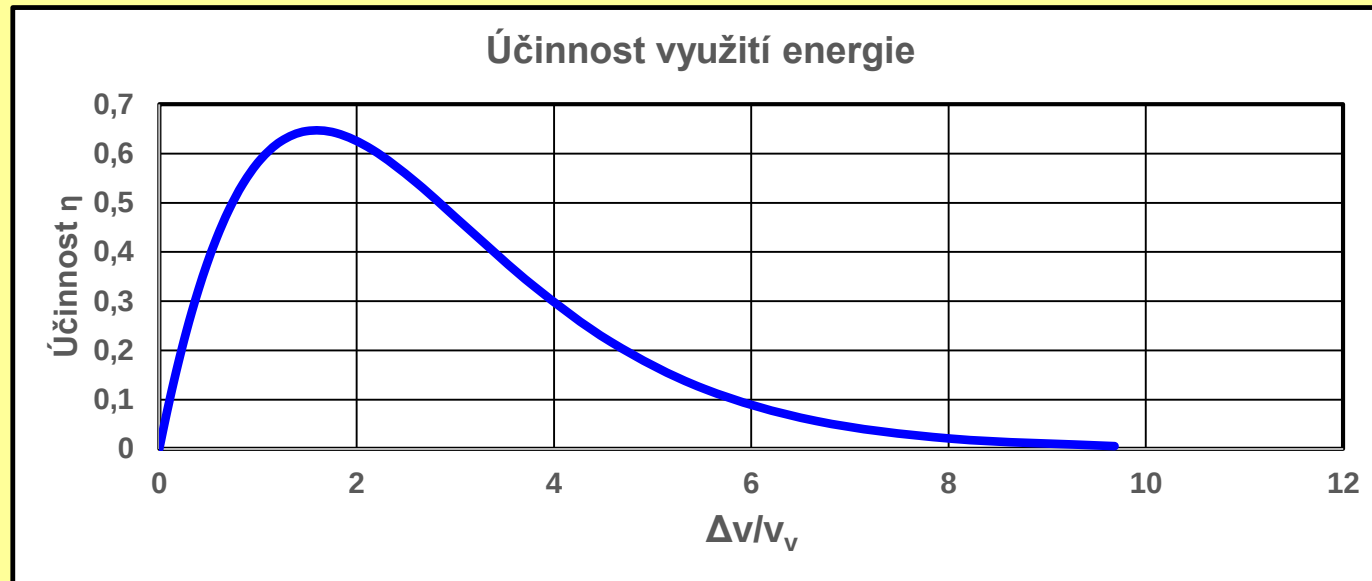
Provedeme integraci v zadaných mezích:

$$(\ln m_F - \ln m_I) = -\frac{\frac{\Delta v}{c}}{\frac{v_v}{c}} \Rightarrow \frac{\Delta v}{c} = \frac{v_v}{c} \cdot \ln \frac{m_I}{m_F}.$$

Získáme již známý tvar Ciolkovského rovnice

$$\frac{\Delta v}{v_v} = \ln \frac{m_I}{m_F}$$

Je potřeba mít dostatečnou změnu energie a hybnosti



Účinnost (klasicky)

$$\eta = \frac{Em_F}{E(m_I - m_F)} = \frac{\frac{1}{2}m_F(\Delta v)^2}{\frac{1}{2}(m_I - m_F)v_v^2} = \frac{\left(\frac{\Delta v}{v_v}\right)^2}{e^{\frac{\Delta v}{v_v}} - 1}$$

Nalezení polohy maxima funkce:

$$\left(\frac{\Delta v}{v_v}\right)_{\max \eta} = 1,59$$

Maximální účinnost:

$$\eta_{\max} = \frac{\left(\frac{\Delta v}{v_v}\right)_{\max \eta}^2}{e^{\left(\frac{\Delta v}{v_v}\right)_{\max \eta}} - 1} = 0,648$$

Optimální poměr hmotností:

$$\frac{m_I}{m_F} = 4,92$$

Relativistický případ – kdy a k čemu vede

Do $v = 0,14 c$ je rozdíl mezi relativistickým popisem a nerelativistickou limitou menší než 1 %

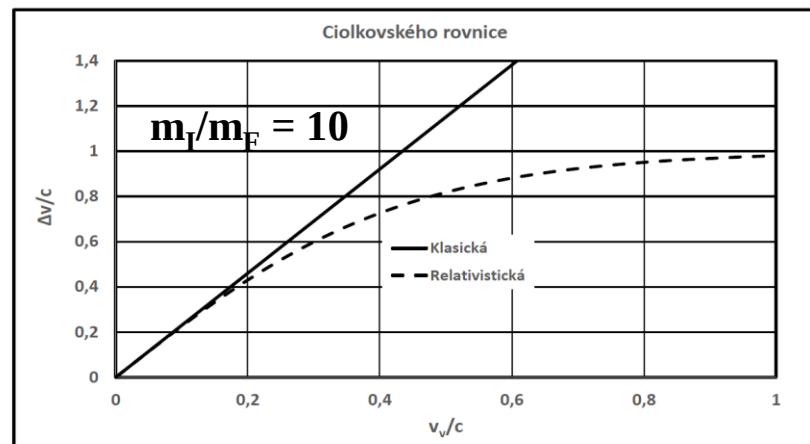
I pro $v = 0,2 c$ ukazuje klasický popis velmi dobře realitu – jde o hranici nutnou pro let člověka k nejbližším hvězdám

Pro vyšší rychlosti je nutný relativistický popis – popis relativity: studijní texty Fyzikální olympiády

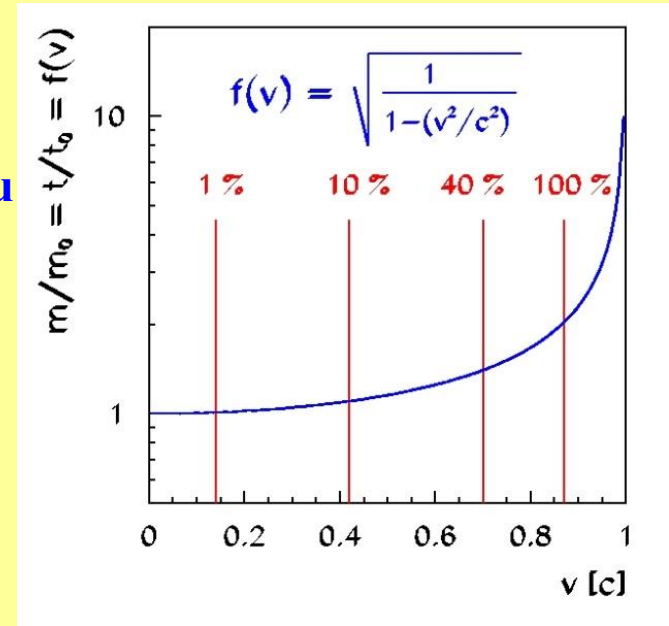
Relativistická Ciolkovského rovnice:

$$\frac{\Delta v}{c} = \tanh\left(\frac{v_v}{c} \cdot \ln \frac{m_I}{m_F}\right)$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$



Srovnání relativistického a klasického popisu



Rozdíl mezi relativistickým výpočtem a nerelativistickým přiblížením



Proxima Centauri: vzdálenost 4,22 sv. let

Konečná rychlost letu: $\Delta v = 0,2 c$

Doba letu: $t > 21$ let (závisí na tom, jak dlouhá bude doba urychlování)

Potřebná energie: $2 \cdot 10^8$ TJ $\rightarrow$ ekvivalentní hmotnost: 2 t

hmotnost rozštěpeného uranu: $m_p = 2\,200$ t

Užitečný náklad: $m_u = 100$ t

Nutnost postupného odhazování paliva

**Pozor: platí jedině v
případě, že se rozštěpí
úplně vše – není reálné**

$m_1 = 100$ t

$v_v = 40$ km/s a $10\,000$ km/s

$\Delta v = 0,2 c = 60\,000$ km/s

Výkon v řádu desítek GW

Hmotnost tryskového plynu:

$$(m_I - m_F) = m_F \left(e^{\frac{\Delta v}{v_v}} - 1 \right)$$

$v_v = 40$ km/s $\rightarrow m_0 - m_1 = 10^{651}$ t

$v_v = 10\,000$ km/s $\rightarrow m_0 - m_1 = 43\,700$ t

Mimo veškerou realitu

Co s rozštěpeným uranem? Také mimo realitu

málo efektivní konverze z tepla do urychlení

$\Delta v = 0,02 c = 6000$ km/s

$v_v = 40$ km/s $\rightarrow m_0 - m_1 = 10^{65}$ t

$v_v = 10\,000$ km/s $\rightarrow m_0 - m_1 = 86$ t

$\Delta v = 0,002 c = 600$ km/s

$v_v = 40$ km/s $\rightarrow m_0 - m_1 = 3,3 \cdot 10^8$ t

$v_v = 10\,000$ km/s $\rightarrow m_0 - m_1 = 6$ t

Ekvivalentní hmotnost k energii: 0,002 kg

Hmotnost rozštěpeného uranu: 2,22 kg

Délka cesty několik tisíc let



Příklad k řešení – průzkum vnějších oblastí Sluneční soustavy

Automatická sonda pro průzkum hranic Sluneční soustavy má celkovou hmotnost bez paliva 20 tun. Bude startovat z oběžné dráhy okolo Země. Potřebujeme, aby měla i po opuštění Sluneční soustavy rychlost nejméně 20 km/s. Úniková rychlost ze Sluneční soustavy je na dráze Země 42,1 km/s a rychlost oběhu Země je 29,8 km/s. Využijeme jaderný reaktor. Máme dvě možnosti. Využijeme tepelný motor, kde je výtoková rychlost 10 km/s nebo iontový motor s výtokovou rychlostí 200 km/s.

- 1) Jaká je hmotnost potřebného vodíku, který je médiem pro pohon tepelného motoru, a xenonu, který se urychluje v iontovém motoru?
- 2) Jaká bude kinetická energie sondy po konci urychlování a jaká bude efektivita využití kinetické energie urychlovacího media pro zmíněné varianty? Diskutujte z hlediska efektivity vhodnost různých motorů pro jakou změnu rychlosti?
- 3) Jak dlouho po urychlení potrvá cesta sondy k hranicím Kuiperova pásu, který je okolo 60 AU, hranicím heliopauzy ve vzdálenosti 130 AU a hranicím Sluneční soustavy, která je za hranicí Oortova oblaku někde u 130 000 AU (AU – astronomická jednotka je přibližně 149,6 milionů kilometrů). Diskutujte smysluplný dosah sond.



Závěr

- 1) Let i k nejbližším hvězdám je extrémní výzvou nejen z energetického hlediska, ale také z hlediska potřebné dosažené hybnosti
- 2) Při využití raketového motoru jej popisuje Ciolkovského rovnice, která obsahuje logaritmickou funkci – potřebná hmotnost „paliva“ roste exponenciálně s potřebnou změnou rychlosti
- 3) Kritickým parametrem raketového motoru je výtoková rychlost, její velikost závisí na teplotě plynu (plazmatu). U jaderných reaktorů je 10 km/s pro klasické a nepřesahuje 40 km/s pro exotické s tekutým jádrem.
- 4) Až po rychlost 0,14 c je možné využít klasické přiblížení s chybou menší než 1 %, pak je nutné využít relativistickou Ciolkovského rovnici
- 5) Podrobný popis i odvození rovnic raketového letu v nejnovějším čísle RMF

