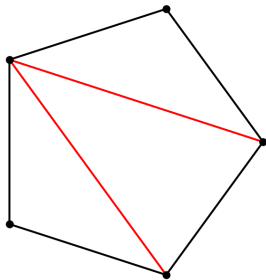
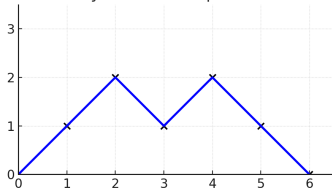


Co jsou to Catalanova čísla a kde všude se nachází?

Kryštof Sedláček

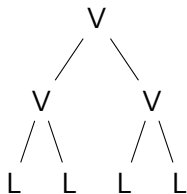
Co mají tyto struktury společného?

Dyckova cesta pro $n=3$



Co mají tyto struktury společného?

Binární strom:



Závorkování:

$((()))$, $((())$, $((()))$

Kolik je těchto struktur?

Explicitní vzorec:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Kolik je těchto struktur?

Explicitní vzorec:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Příklad pro $n = 3$:

$$C_3 = \frac{1}{4} \cdot \binom{6}{3} = 5$$

Rekurentní vztah

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$$

Rekurentní vztah

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$$

Pro $n = 3$:

$$C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 2 + 1 + 2 = 5$$

Co je bijekce?

Definice

Bijekce je vzájemně jednoznačné přiřazení mezi dvěma množinami, neboli ke každému prvku z jedné množiny jsem schopný přiřadit právě jeden z té druhé.

Bijekce mezi Dyckovou cestou a závorkováním

- ▶ krok nahoru $(1, 1)$ odpovídá (
- ▶ krok dolů $(1, -1)$ odpovídá)

Bijekce mezi Dyckovou cestou a závorkováním

- ▶ krok nahoru $(1, 1)$ odpovídá $($
- ▶ krok dolů $(1, -1)$ odpovídá $)$

$$((() (())) \longleftrightarrow \text{UUDUUDDD}$$

Zadání: Najděte a popište bijekci mezi:

- ▶ množinou všech Dyckových cest délky $2n$ neboli všech cest z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2n, 0)$ za použití kroků nahoru $(1, 1)$ a kroků dolů $(1, -1)$, které nikdy neklesnou pod osu x .
- ▶ množinou všech celých binárních stromů s n vnitřními vrcholy.

Příklad dvou odpovídajících dvojic pro $n = 3$:

