

Nejtěžší je dokázat, že něco nejde

FJFI ČVUT, 20.6.2025

100. ročník časopisu RM-F

Mirko Rokyta
KMA MFF UK Praha



Conwayova úloha:

Conwayova úloha:

- Čtverečkovaný papír (libovolně velkého rozměru) je rozdělen vodorovnou čarou (bariérou) na dvě části.

Conwayova úloha:

- Čtverečkovaný papír (libovolně velkého rozměru) je rozdělen vodorovnou čarou (bariérou) na dvě části.
- Do čtverečků ve spodní části (pod bariérou) lze umístit jakékoli konečné množství kamenů, do horní části se nesmí umístit žádný.

Conwayova úloha:

- Čtverečkovaný papír (libovolně velkého rozměru) je rozdělen vodorovnou čarou (bariérou) na dvě části.
- Do čtverečků ve spodní části (pod bariérou) lze umístit jakékoli konečné množství kamenů, do horní části se nesmí umístit žádný.
- Kameny ve spodní části se mohou vzájemně přeskakovat ve vodorovném a svislém směru, doprava i doleva, nahoru i dolů, je-li za přeskakovaným kamenem místo.

Conwayova úloha:

- Čtverečkovaný papír (libovolně velkého rozměru) je rozdělen vodorovnou čarou (bariérou) na dvě části.
- Do čtverečků ve spodní části (pod bariérou) lze umístit jakékoli konečné množství kamenů, do horní části se nesmí umístit žádný.
- Kameny ve spodní části se mohou vzájemně přeskakovat ve vodorovném a svislém směru, doprava i doleva, nahoru i dolů, je-li za přeskakovaným kamenem místo. Přeskočený kámen je nutno odstranit (jako ve hře Dáma.)

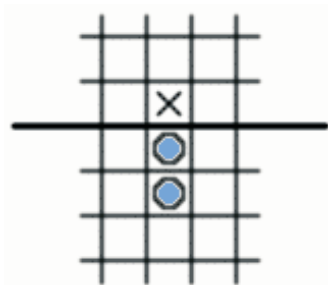
Conwayova úloha:

- Čtverečkovaný papír (libovolně velkého rozměru) je rozdělen vodorovnou čarou (bariérou) na dvě části.
- Do čtverečků ve spodní části (pod bariérou) lze umístit jakékoli konečné množství kamenů, do horní části se nesmí umístit žádný.
- Kameny ve spodní části se mohou vzájemně přeskakovat ve vodorovném a svislém směru, doprava i doleva, nahoru i dolů, je-li za přeskakovaným kamenem místo. Přeskočený kámen je nutno odstranit (jako ve hře Dáma.)

Otázka: Do které horní řady (tj. kam nejdál) za bariéru je možno takto doskákat a pomocí jaké konfigurace kamenů ve spodní části?

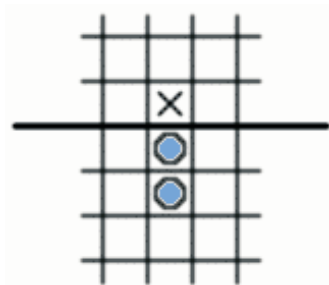
Do které řady lze doskákat?

Konfigurace pro skok do první řady za bariéru je triviální.



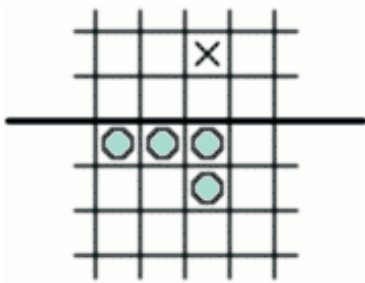
Do které řady lze doskákat?

Konfigurace pro skok do první řady za bariéru je triviální.



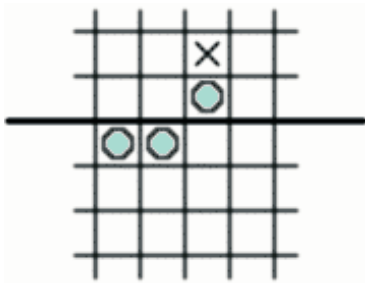
Uměli byste najít konfiguraci, pomocí které lze doskákat do druhé řady?

Do které řady lze doskákat?



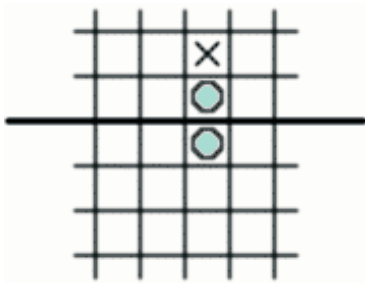
To je ona. Věříte?

Do které řady lze doskákat?



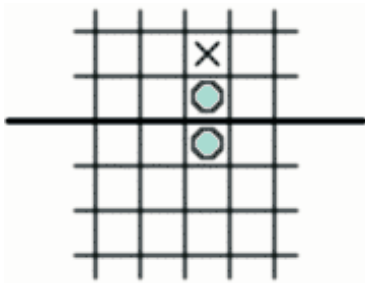
Přeskočený kámen je potřeba odstranit.

Do které řady lze doskákat?



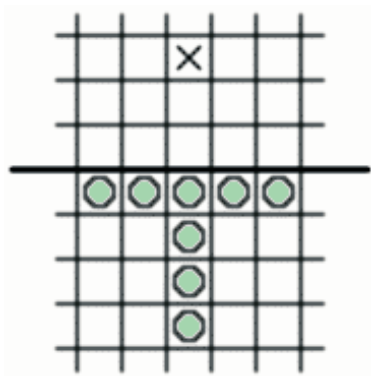
... a poslední skok už je jasný.

Do které řady lze doskákat?

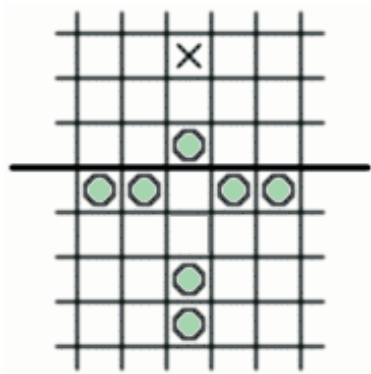


... a poslední skok už je jasný. A co třetí řada?

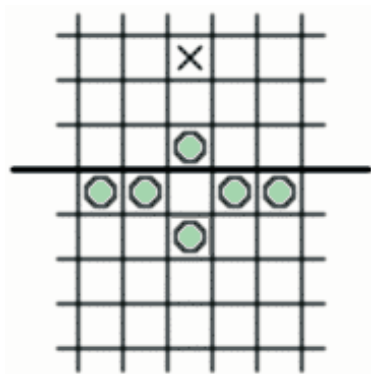
Do které řady lze doskákat?



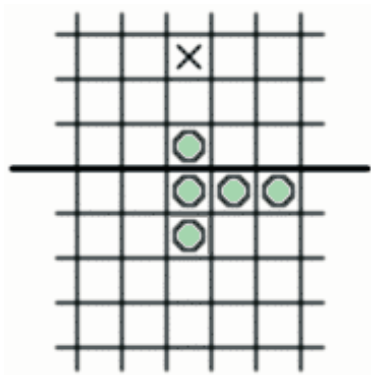
Do které řady lze doskákat?



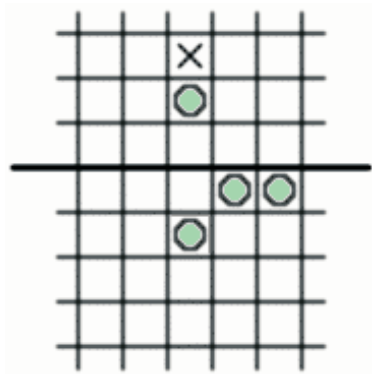
Do které řady lze doskákat?



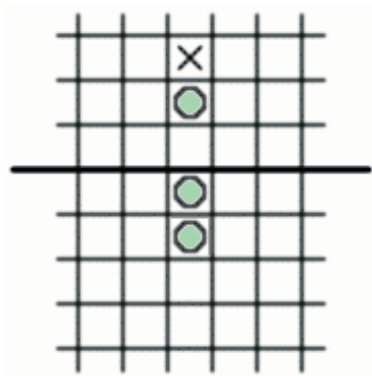
Do které řady lze doskákat?



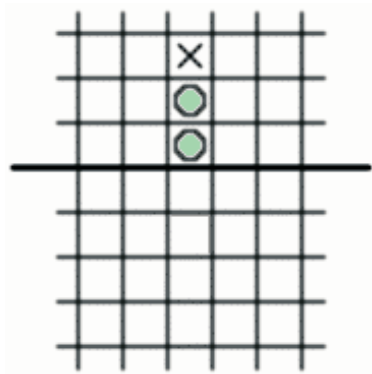
Do které řady lze doskákat?



Do které řady lze doskákat?



Do které řady lze doskákat?



Krátké shrnutí:

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.
- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.
- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?
- A kolik kamenů je k tomu minimálně potřeba?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.
- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?
- A kolik kamenů je k tomu minimálně potřeba?

Překvapení č. 1: Je potřeba alespoň 20 kamenů.

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.
- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?
- A kolik kamenů je k tomu minimálně potřeba?

Překvapení č. 1: Je potřeba alespoň 20 kamenů.

Úloha:

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.
- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?
- A kolik kamenů je k tomu minimálně potřeba?

Překvapení č. 1: Je potřeba alespoň 20 kamenů.

Úloha: Zkuste tuto konfiguraci kamenů najít a ukázat, jak se musí skákat, abyste se dostali do čtvrté řady za bariéru.

Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) **NELZE** doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) **NELZE** doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

Umíme to dokázat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) **NELZE** doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

Umíme to dokázat?

ANO. Umíme dokázat, že v tomto případě to **NELZE**.

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) **NELZE** doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

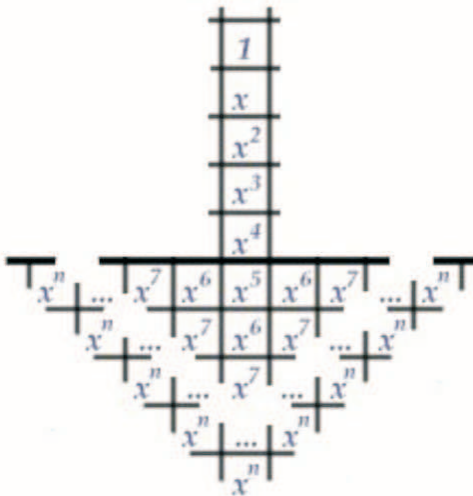
Umíme to dokázat?

ANO. Umíme dokázat, že v tomto případě to **NELZE**.

První krok Conwayova důkazu: "obodování" polí zatím neznámými hodnotami s chytrou strukturou.

Do které řady lze doskákat?

Chytrost tohoto obodování se projeví až později.



Do které řady lze doskákat?

...	x^2	x	1	x	x^2	...
...	x^3	x^2	x	x^2	x^3	...
...	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	...
...	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	...
...	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	...
...	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	...
...	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	...
...	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	...
...	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Hlavní myšlenkou důkazu je sečíst na začátku hodnoty všech polí v dolní části roviny, na kterých leží kámen

Do které řady lze doskákat?

...	x^2	x	1	x	x^2	...
...	x^3	x^2	x	x^2	x^3	...
...	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	...
...	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	...
...	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	...
...	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	...
...	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	...
...	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	...
...	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Hlavní myšlenkou důkazu je sečíst na začátku hodnoty všech polí v dolní části roviny, na kterých leží kámen a sledovat, co se s tímto součtem děje v průběhu skákání.

Do které řady lze doskákat?

...	x^2	x	1	x	x^2	...
...	x^3	x^2	x	x^2	x^3	...
...	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	...
...	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	...
...	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	...
...	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	...
...	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	...
...	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	...
...	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Do které řady lze doskákat?

...	x^2	x	1	x	x^2	...
...	x^3	x^2	x	x^2	x^3	...
...	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	...
...	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	...
...	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	...
...	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	...
...	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	...
...	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	...
...	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Vpravo je nekonečný součet. Může mít konečnou hodnotu?

Do které řady lze doskákat?

Vše je otázkou rafinované volby konkrétní hodnoty x .

Vše je otázkou rafinované volby konkrétní hodnoty x .

Conway ukázal, že když se zvolí $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, tak se stane toto:

- Nekonečný součet vpravo je menší než 1, a tedy $S < 1$,

Vše je otázkou rafinované volby konkrétní hodnoty x .

Conway ukázal, že když se zvolí $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, tak se stane toto:

- Nekonečný součet vpravo je menší než 1, a tedy $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.

Vše je otázkou rafinované volby konkrétní hodnoty x .

Conway ukázal, že když se zvolí $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, tak se stane toto:

- Nekonečný součet vpravo je menší než 1, a tedy $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší**,

Vše je otázkou rafinované volby konkrétní hodnoty x .

Conway ukázal, že když se zvolí $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, tak se stane toto:

- Nekonečný součet vpravo je menší než 1, a tedy $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší**, tedy **po celou dobu skákání zůstává $S < 1$** .

Vše je otázkou rafinované volby konkrétní hodnoty x .

Conway ukázal, že když se zvolí $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, tak se stane toto:

- Nekonečný součet vpravo je menší než 1, a tedy $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší**, tedy **po celou dobu skákání zůstává $S < 1$** .

Ale:

Pokud by bylo možno doskákat do páté řady, ležel by po dosažení tohoto cíle poslední kámen na poli s hodnotou 1,

Do které řady lze doskákat?

Vše je otázkou rafinované volby konkrétní hodnoty x .

Conway ukázal, že když se zvolí $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, tak se stane toto:

- Nekonečný součet vpravo je menší než 1, a tedy $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší**, tedy **po celou dobu skákání zůstává $S < 1$** .

Ale:

Pokud by bylo možno doskákat do páté řady, ležel by po dosažení tohoto cíle poslední kámen na poli s hodnotou 1, tedy by v té chvíli platilo $S = 1$, což ale není možné.

Do které řady lze doskákat?

Vše je otázkou rafinované volby konkrétní hodnoty x .

Conway ukázal, že když se zvolí $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, tak se stane toto:

- Nekonečný součet vpravo je menší než 1, a tedy $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší**, tedy **po celou dobu skákání zůstává $S < 1$** .

Ale:

Pokud by bylo možno doskákat do páté řady, ležel by po dosažení tohoto cíle poslední kámen na poli s hodnotou 1, tedy by v té chvíli platilo $S = 1$, což ale není možné. (Bylo dosaženo tzv. sporu.)

Do které řady lze doskákat?

...	x^2	x	1	x	x^2	...
...	x^3	x^2	x	x^2	x^3	...
...	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	...
...	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	...
...	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	...
...	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	...
...	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	...
...	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	...
...	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

(Ani ranní ptáče nedoskáče dál, než do čtvrté řady.)

Děkuji za pozornost.

Mirko Rokyta
KMA MFF Praha
Sokolovská 83
Praha 8 - Karlín

`mirko.rokyta@mff.cuni.cz`