

p -adická čísla

Adéla Heroudková

20. června 2025

p -valuace

Definice

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, je $v_p(n)$ unikátní celé nezáporné číslo splňující:

$$n = p^{v_p(n)} m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad p \nmid m.$$

Jestliže $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$, potom definujeme:

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b).$$

Pro nulu definujeme: $v_p(0) = \infty$.

p -valuace

Definice

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, je $v_p(n)$ unikátní celé nezáporné číslo splňující:

$$n = p^{v_p(n)} m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad p \nmid m.$$

Jestliže $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$, potom definujeme:

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b).$$

Pro nulu definujeme: $v_p(0) = \infty$.

Příklady:

- $v_3(54) = v_3(27 \cdot 2) = 3$
- $v_7(101) = 0$
- $v_5(\frac{17}{125}) = -3$

p -adická absolutní hodnota

Definice

Pro každé nenulové $x \in \mathbb{Q}$ definujeme jeho p -adickou absolutní hodnotu jako:

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}.$$

Pokud $x = 0$, pak $|x|_p = 0$.

p -adická absolutní hodnota

Definice

Pro každé nenulové $x \in \mathbb{Q}$ definujeme jeho p -adickou absolutní hodnotu jako:

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}.$$

Pokud $x = 0$, pak $|x|_p = 0$.

Definice

p -adická metrika: $|x - y|_p$

p -adická absolutní hodnota

Definice

Pro každé nenulové $x \in \mathbb{Q}$ definujeme jeho p -adickou absolutní hodnotu jako:

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}.$$

Pokud $x = 0$, pak $|x|_p = 0$.

Definice

p -adická metrika: $|x - y|_p$

Příklady:

- $|4 - 5|_3 = 1$
- $|101 - 1|_5 = 5^{-2}$
- $|\frac{22}{7} - 3|_7 = 7$

Reálná vs p -adická čísla

Co jsou to reálná čísla?

Reálná čísla jsou zúplněním racionálních čísel

Reálná vs p -adická čísla

Co jsou to reálná čísla?

Reálná čísla jsou zúplněním racionálních čísel

Co jsou to p -adická čísla?

p -adická čísla jsou zúplnění racionálních čísel vůči p -adické metrice

Reálná vs p -adická čísla

Co jsou to reálná čísla?

Reálná čísla jsou zúplněním racionálních čísel

Co jsou to p -adická čísla?

p -adická čísla jsou zúplnění racionálních čísel vůči p -adické metrice

Těleso p -adických čísel - $\mathbb{Q}_p$

Reálná vs p -adická čísla

Všechny prvky $\mathbb{R}$ můžeme zapsat jako:

$$\sum_{n=z}^{\infty} a_n 10^{-n}, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

Reálná vs p -adická čísla

Všechny prvky $\mathbb{R}$ můžeme zapsat jako:

$$\sum_{n=z}^{\infty} a_n 10^{-n}, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

Všechny prvky $\mathbb{Q}_p$ můžeme zapsat jako:

$$\sum_{n=z}^{\infty} a_n p^n, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$$

p -adická čísla

- číslo 127 v $\mathbb{Q}_5$: $2 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3$

p -adická čísla

■ číslo 127 v $\mathbb{Q}_5$: $2 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3$

■ číslo $\frac{49}{3}$ v $\mathbb{Q}_3$: $1 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2$

p -adická čísla

- číslo 127 v $\mathbb{Q}_5$: $2 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3$
- číslo $\frac{49}{3}$ v $\mathbb{Q}_3$: $1 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2$
- číslo -1 v $\mathbb{Q}_3$:

p -adická čísla

■ číslo 127 v $\mathbb{Q}_5$: $2 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3$

■ číslo $\frac{49}{3}$ v $\mathbb{Q}_3$: $1 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2$

■ číslo -1 v $\mathbb{Q}_3$:

$$(-1) + 1 = 0$$

$$\sum a_n 3^n + 1 = 0$$

p -adická čísla

■ číslo 127 v $\mathbb{Q}_5$: $2 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3$

■ číslo $\frac{49}{3}$ v $\mathbb{Q}_3$: $1 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2$

■ číslo -1 v $\mathbb{Q}_3$:

$$(-1) + 1 = 0$$

$$\sum a_n 3^n + 1 = 0$$

$$-1 = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot 3^n = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 \dots$$

p -adická čísla

■ číslo 127 v $\mathbb{Q}_5$: $2 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3$

■ číslo $\frac{49}{3}$ v $\mathbb{Q}_3$: $1 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2$

■ číslo -1 v $\mathbb{Q}_3$:

$$(-1) + 1 = 0$$

$$\sum a_n 3^n + 1 = 0$$

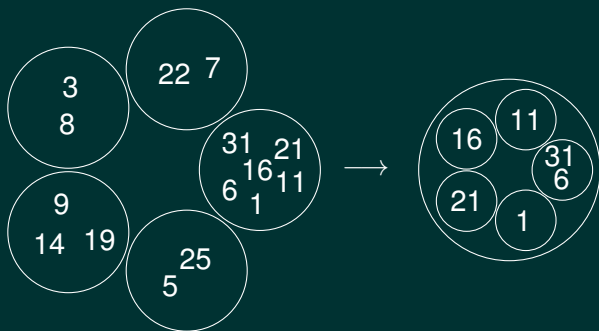
$$-1 = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot 3^n = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 \dots$$

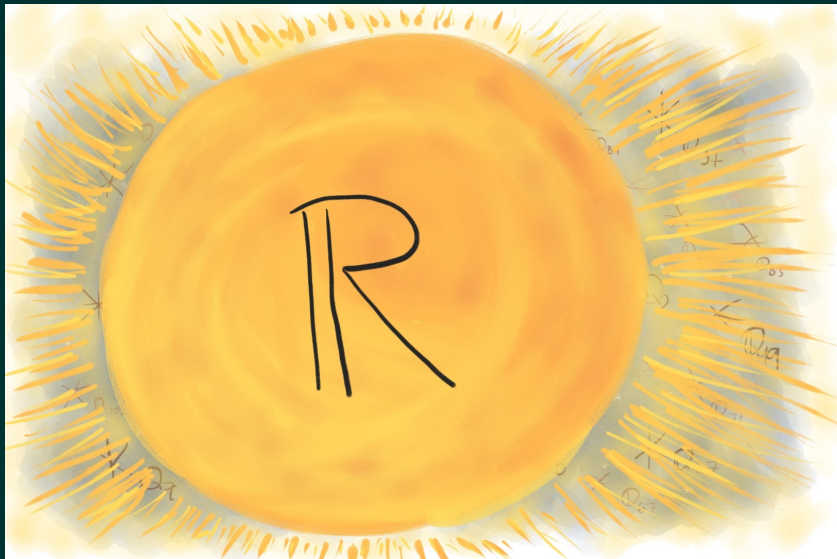
■ V $\mathbb{Q}_p$ leží $(p-1)$ -ní odmocniny z jedné

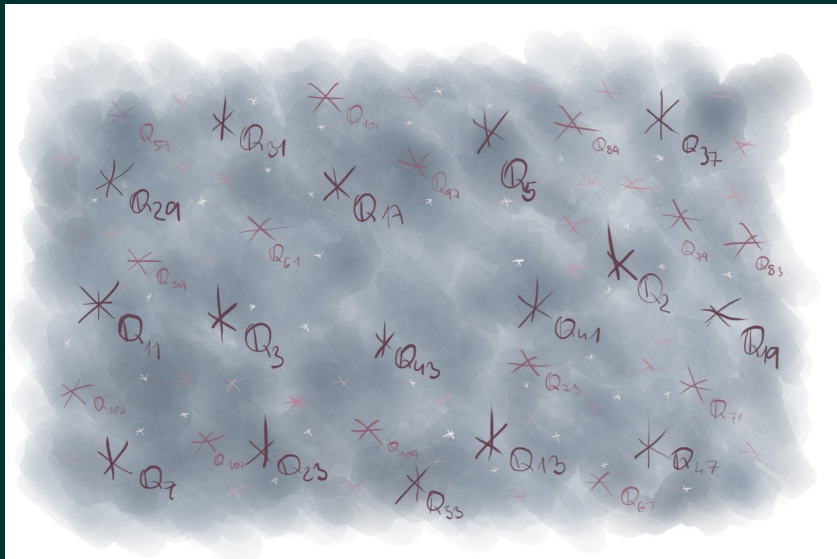
Příklad

Jak napíšeme číslo $\frac{2}{3}$ v $\mathbb{Q}_5$?

Vizualizace $\mathbb{Q}_p$







Využití p -adických čísel

Věta

Ostrowského věta:

Každá netrivialní absolutní hodnota na $\mathbb{Q}$ je ekvivalentní $s | \cdot |$ nebo $s | \cdot |_p$, pro nějaké prvočíslo p .

Využití p -adických čísel

Věta

Ostrowského věta:

Každá netrivialní absolutní hodnota na $\mathbb{Q}$ je ekvivalentní $s \mid \mid$ nebo $s \mid \mid_p$, pro nějaké prvočíslo p .

Věta

Lagrangeova věta o čtyřech čtvercích:

Každé přirozené číslo jde napsat jako součet čtyř druhých mocnin celých čísel.

Děkuji za pozornost