Nerovnost s absolutní hodnotou

Oliver Bukovianský

20. 6. 2025

Zadání úlohy

Dokažte, že pro libovolná $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$|x| + |y| + |z| \geq |x + y| + |x + z| + |y + z| - |x + y + z|.$$

Trojúhelníková nerovnost

Věta ($\triangle$-nerovnost)

Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Důkaz:

- $xy \leq |xy| = |x||y|$

Trojúhelníková nerovnost

Věta ($\triangle$-nerovnost)

Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Důkaz:

- $xy \leq |xy| = |x||y|$
- $2xy \leq 2|x||y|$

Trojúhelníková nerovnost

Věta ($\triangle$-nerovnost)

Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Důkaz:

- $xy \leq |xy| = |x||y|$
- $2xy \leq 2|x||y|$
- $x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$

Trojúhelníková nerovnost

Věta ($\triangle$-nerovnost)

Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Důkaz:

- $xy \leq |xy| = |x||y|$
- $2xy \leq 2|x||y|$
- $x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$
- $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$

Trojúhelníková nerovnost

Věta ($\triangle$-nerovnost)

Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Důkaz:

- $xy \leq |xy| = |x||y|$
- $2xy \leq 2|x||y|$
- $x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$
- $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$
- $\sqrt{(x + y)^2} \leq \sqrt{(|x| + |y|)^2}$

Trojúhelníková nerovnost

Věta ($\triangle$-nerovnost)

Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Důkaz:

- $xy \leq |xy| = |x||y|$
- $2xy \leq 2|x||y|$
- $x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$
- $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$
- $\sqrt{(x + y)^2} \leq \sqrt{(|x| + |y|)^2}$
- $|x + y| \leq ||x| + |y|| = |x| + |y|$, což jsme chtěli. $\blacksquare$

Trojúhelníková nerovnost

Věta ($\triangle$-nerovnost)

Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Důkaz:

- $xy \leq |xy| = |x||y|$
- $2xy \leq 2|x||y|$
- $x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$
- $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$
- $\sqrt{(x + y)^2} \leq \sqrt{(|x| + |y|)^2}$
- $|x + y| \leq ||x| + |y|| = |x| + |y|$, což jsme chtěli. $\blacksquare$

Poznámka

rozšíření $\triangle$-nerovnosti pro libovolný počet reálných proměnných:
$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \geq |x_1 + x_2 + \ldots x_n|$.

Kudy cesta nevede

- $|x| + |y| \geq |x + y|$

Kudy cesta nevede

- $|x| + |y| \geq |x + y|$
- $|x| + |z| \geq |x + z|$

Kudy cesta nevede

- $|x| + |y| \geq |x + y|$
- $|x| + |z| \geq |x + z|$
- $|y| + |z| \geq |y + z|$

Kudy cesta nevede

- $|x| + |y| \geq |x + y|$
- $|x| + |z| \geq |x + z|$
- $|y| + |z| \geq |y + z|$
- součtem nerovností získáme:
  $2|x| + 2|y| + 2|z| \geq |x + y| + |x + z| + |y + z|$

Kudy cesta nevede

- $|x| + |y| \geq |x + y|$
- $|x| + |z| \geq |x + z|$
- $|y| + |z| \geq |y + z|$
- součtem nerovností získáme:
  $2|x| + 2|y| + 2|z| \geq |x + y| + |x + z| + |y + z|$
- působí lákavě od získané nerovnosti "odečíst" nerovnost
  $|x| + |y| + |z| \geq |x + y + z|$ a získat
  $|x| + |y| + |z| \geq |x + y| + |x + z| + |y + z| - |x + y + z|$

Kudy cesta nevede

- $|x| + |y| \geq |x + y|$
- $|x| + |z| \geq |x + z|$
- $|y| + |z| \geq |y + z|$
- součtem nerovností získáme:
  $2|x| + 2|y| + 2|z| \geq |x + y| + |x + z| + |y + z|$
- působí lákavě od získané nerovnosti "odečíst" nerovnost
  $|x| + |y| + |z| \geq |x + y + z|$ a získat
  $|x| + |y| + |z| \geq |x + y| + |x + z| + |y + z| - |x + y + z|$
- postup je to chybný

Princip inkluze a exkluze

Věta (PIE)

Pro libovolné konečné množiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ platí:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\cdots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} X_i\right|,$$

kde symbol $\binom{A}{j}$ označuje všechny j-prvkové podmnožiny konečné množiny A.

Princip inkluze a exkluze

Věta (PIE)

Pro libovolné konečné množiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ platí:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\cdots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} X_i\right|,$$

kde symbol $\binom{A}{j}$ označuje všechny j-prvkové podmnožiny konečné množiny A.

Poznámka

Pro $n = 2, 3$ a konečné množiny $X_1 = X, X_2 = Y, X_3 = Z$ dostáváme známé vztahy:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|,$$

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Že by obecná souvislost?

- $n = 2$:
  $|X| + |Y| - |X \cap Y| = |X \cup Y| \overset{!}{\iff} |x| + |y| - |x + y| \geq 0$

Že by obecná souvislost?

- $n = 2:$
  $|X| + |Y| - |X \cap Y| = |X \cup Y| \overset{!}{\iff} |x| + |y| - |x + y| \geq 0$
- $n = 3:$
  $|X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z| = |X \cup Y \cup Z| \overset{!}{\iff}$
  $|x| + |y| + |z| - |x + y| - |x + z| - |y + z| + |x + y + z| \geq 0$

Nikoli!

- $n = 4$:
$$|X|+|Y|+|Z|+|W|-|X\cap Y|-|X\cap Z|-|X\cap W|-|Y\cap Z|-|Y\cap W|-|Z\cap W|+|X\cap Y\cap Z|+|X\cap Y\cap W|+|X\cap Z\cap W|+|Y\cap Z\cap W|-|X\cap Y\cap Z\cap W| = |X\cup Y\cup Z\cup W| \overset{?}{\iff} |x|+|y|+|z|+|w|-|x+y|-|x+z|-|x+w|-|y+z|-|y+w|-|z+w|+|x+y+z|+|x+y+w|+|x+z+w|+|y+z+w|-|x+y+z+w| \geq 0$$

Nikoli!

- $n = 4$:
$|X|+|Y|+|Z|+|W|-|X\cap Y|-|X\cap Z|-|X\cap W|-|Y\cap Z|-|Y\cap W|-|Z\cap W|+|X\cap Y\cap Z|+|X\cap Y\cap W|+|X\cap Z\cap W|+|Y\cap Z\cap W|-|X\cap Y\cap Z\cap W| = |X\cup Y\cup Z\cup W| \overset{?}{\Longleftrightarrow}$
$|x|+|y|+|z|+|w|-|x+y|-|x+z|-|x+w|-|y+z|-|y+w|-|z+w|+|x+y+z|+|x+y+w|+|x+z+w|+|y+z+w|-|x+y+z+w| \geq 0$
- stačí zvolit $x = y = z \neq 0 \wedge w = -2x$:

$$3|x|+2|x|-2|x|-2|x|-|x|-2|x|-|x|-|x|+3|x|+0+0+0-|x| =$$

$$= -2|x| \leq 0$$

Hezká aplikace nerovnosti

Příklad z webu Cut the Knot

Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a^2 - ac + c^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \leq$$

$$a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}.$$

Řešení:

Hezká aplikace nerovnosti

Příklad z webu Cut the Knot

Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a^2 - ac + c^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \leq$$

$$a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}.$$

Řešení:

- Předně... jsou výrazy dobře definované?

Hezká aplikace nerovnosti

Příklad z webu Cut the Knot

Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a^2 - ac + c^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \leq$$

$$a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}.$$

Řešení:

- Předně... jsou výrazy dobře definované?
- platí: $a^2 - ab + b^2 = (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2$

Hezká aplikace nerovnosti

Příklad z webu Cut the Knot

Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a^2 - ac + c^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \leq$$

$$a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}.$$

Řešení:

- Předně... jsou výrazy dobře definované?
- platí: $a^2 - ab + b^2 = (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2$
- také:
  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{4}(2a - b - c)^2 + \frac{3}{4}(b - c)^2$

Hezká aplikace nerovnosti

Příklad z webu Cut the Knot

Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a^2 - ac + c^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \leq$$

$$a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}.$$

Řešení:

- Předně... jsou výrazy dobře definované?
- platí: $a^2 - ab + b^2 = (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2$
- také:
  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{4}(2a - b - c)^2 + \frac{3}{4}(b - c)^2$
- Jeden ze tří komplexních kořenů rovnice $z^3 = 1$ je komplexní číslo $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hezká aplikace nerovnosti

- platí: $|\omega| = 1$ (absolutní hodnota komplexního čísla)

Hezká aplikace nerovnosti

- platí: $|\omega| = 1$ (absolutní hodnota komplexního čísla)
- také: $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (druhý komplexní kořen rovnice $z^3 = 1$)

Hezká aplikace nerovnosti

- platí: $|\omega| = 1$ (absolutní hodnota komplexního čísla)
- také: $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (druhý komplexní kořen rovnice $z^3 = 1$)
- definuji: $x := a, y := b\omega, z := c\omega^2$

Hezká aplikace nerovnosti

- platí: $|\omega| = 1$ (absolutní hodnota komplexního čísla)
- také: $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (druhý komplexní kořen rovnice $z^3 = 1$)
- definuji: $x := a, y := b\omega, z := c\omega^2$
- platí: $|x| = |a| = a$ (neboť $a \in \mathbb{R}^+$)

Hezká aplikace nerovnosti

- platí: $|\omega| = 1$ (absolutní hodnota komplexního čísla)
- také: $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (druhý komplexní kořen rovnice $z^3 = 1$)
- definuji: $x := a, y := b\omega, z := c\omega^2$
- platí: $|x| = |a| = a$ (neboť $a \in \mathbb{R}^+$)
- a také $|y| = |b\omega| = |b||\omega| = |b| \cdot 1 = b$, obdobně $|z| = c$

Hezká aplikace nerovnosti

- platí: $|\omega| = 1$ (absolutní hodnota komplexního čísla)
- také: $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (druhý komplexní kořen rovnice $z^3 = 1$)
- definuji: $x := a, y := b\omega, z := c\omega^2$
- platí: $|x| = |a| = a$ (neboť $a \in \mathbb{R}^+$)
- a také $|y| = |b\omega| = |b||\omega| = |b| \cdot 1 = b$, obdobně $|z| = c$

Hezká aplikace nerovnosti

- platí: $|\omega| = 1$ (absolutní hodnota komplexního čísla)
- také: $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (druhý komplexní kořen rovnice $z^3 = 1$)
- definuji: $x := a, y := b\omega, z := c\omega^2$
- platí: $|x| = |a| = a$ (neboť $a \in \mathbb{R}^+$)
- a také $|y| = |b\omega| = |b||\omega| = |b| \cdot 1 = b$, obdobně $|z| = c$
- platí: $|x + y| = |a + b\omega| = |a - \frac{1}{2}b + ib\frac{\sqrt{3}}{2}| =$ $\sqrt{(a - \frac{1}{2}b)^2 + b^2\frac{3}{4}} = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$

Hezká aplikace nerovnosti

- platí: $|\omega| = 1$ (absolutní hodnota komplexního čísla)
- také: $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (druhý komplexní kořen rovnice $z^3 = 1$)
- definuji: $x := a, y := b\omega, z := c\omega^2$
- platí: $|x| = |a| = a$ (neboť $a \in \mathbb{R}^+$)
- a také $|y| = |b\omega| = |b||\omega| = |b| \cdot 1 = b$, obdobně $|z| = c$
- platí: $|x + y| = |a + b\omega| = |a - \frac{1}{2}b + ib\frac{\sqrt{3}}{2}| =$ $\sqrt{(a - \frac{1}{2}b)^2 + b^2\frac{3}{4}} = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$
- obdobně: $|x + z| = \sqrt{a^2 - ac + c^2}$, $|y + z| = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$

Hezká aplikace nerovnosti

- platí: $|\omega| = 1$ (absolutní hodnota komplexního čísla)
- také: $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (druhý komplexní kořen rovnice $z^3 = 1$)
- definuji: $x := a, y := b\omega, z := c\omega^2$
- platí: $|x| = |a| = a$ (neboť $a \in \mathbb{R}^+$)
- a také $|y| = |b\omega| = |b||\omega| = |b| \cdot 1 = b$, obdobně $|z| = c$
- platí: $|x + y| = |a + b\omega| = |a - \frac{1}{2}b + ib\frac{\sqrt{3}}{2}| =$
  $\sqrt{(a - \frac{1}{2}b)^2 + b^2\frac{3}{4}} = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$
- obdobně: $|x + z| = \sqrt{a^2 - ac + c^2}$, $|y + z| = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$
- a také: $|x + y + z| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}$

Hezká aplikace nerovnosti

- platí: $|\omega| = 1$ (absolutní hodnota komplexního čísla)
- také: $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (druhý komplexní kořen rovnice $z^3 = 1$)
- definuji: $x := a, y := b\omega, z := c\omega^2$
- platí: $|x| = |a| = a$ (neboť $a \in \mathbb{R}^+$)
- a také $|y| = |b\omega| = |b||\omega| = |b| \cdot 1 = b$, obdobně $|z| = c$
- platí: $|x + y| = |a + b\omega| = |a - \frac{1}{2}b + ib\frac{\sqrt{3}}{2}| =$ $\sqrt{(a - \frac{1}{2}b)^2 + b^2\frac{3}{4}} = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$
- obdobně: $|x + z| = \sqrt{a^2 - ac + c^2}$, $|y + z| = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$
- a také: $|x + y + z| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}$
- víme: $|x + y| + |x + z| + |y + z| \leq |x| + |y| + |z| + |x + y + z|$ (to jsme chtěli!)